

$$f(x) = \begin{cases} 30, & 0 < x \leq 30 \\ 2x + \frac{1800}{x} - 90, & 30 < x < 100 \end{cases} \quad (\text{单位: 分钟}).$$

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响, 恒为 40 分钟, 试根据上述分析结果回答下列问题:

(1) 当 x 在什么范围内时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间?

(2) 求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式, 讨论 $g(x)$ 的单调性, 并说明其实际意义.

解析: (1) $f(x) > 40$, 得 $2x + \frac{1800}{x} - 90 > 40$, 解得 $45 < x < 100$.

故当 S 中的自驾成员在 45% 到 100% 之间时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间.

$$(2) g(x) = x\% \cdot f(x) + (1 - x\%) \cdot 40 = \begin{cases} 40 - \frac{1}{10}x, & 0 < x \leq 30 \\ \frac{1}{50}x^2 - \frac{13}{10}x + 58, & 30 < x < 100 \end{cases}$$

而二次函数 $\frac{1}{50}x^2 - \frac{13}{10}x + 58$ 的对称轴是 $x = -\frac{-\frac{13}{10}}{2 \times \frac{1}{50}} = 32.5$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, 32.5)$ 内单减, 在 $(32.5, 100)$ 内单增, 说明当有 32.5% 以上的人自驾时人均通勤时间开始增加.

点评: 本题主要考查分段函数的实际应用, 注意分类讨论和实际问题中自变量、函数的意义与范围. 其实, 在现实生活中存在着大量的分段函数模型, 解题的关键在于阅读、理解和迁移实际问题, 转化为我们熟悉的东西来处理.

训练 10: 某网民使用电脑上因特网有两种方案可选: 一是在家里上网, 费用分为通讯费 (即电话费) 与网络维护费

两部分. 现有政策规定: 通讯费为 0.02 元/分钟, 但每月 30 元封顶 (即超过 30 元则只需交 30 元), 网络维护费 1 元/小时, 但每月上网不超过 10 小时则要交 10 元; 二是到附近网吧上网, 价格为 1.5 元/小时.

(1) 将该网民在某月内在家上网的费用 y (元) 表示为时间 t (小时) 的函数;

(2) 试确定在何种情况下, 该网民在家上网较便宜?

解析: (1) 时间 t 要分成三段. 当 $0 < t \leq 10$ 时, $y = 10 + 60t \cdot 0.02 = 10 + 1.2t$; 当 $10 < t \leq 25$ 时, $y = t + 60t \cdot 0.02 = 2.2t$; 当 $t > 25$ 时, $y = t + 30$.

$$\text{于是 } y = \begin{cases} 10 + 1.2t, & (0 < t \leq 10) \\ 2.2t, & (10 < t \leq 25) \\ t + 30, & (t > 25) \end{cases}$$

(2) 由 $t + 30 < 1.5t \Rightarrow t > 60$. 上网时间超过 60 小时, 则在家上网较便宜.

以上对分段函数问题的高考考点进行了十个方面的梳理和总结. 不难看出, 分段函数问题在高考中主要以选择题或填空题的形式出现, 并且试题的位置在逐渐后移, 这意味着广度、深度和难度都在不断加大. 特别是导数的引入, 拓宽了高考对函数问题的命题空间和解题空间, 以致在近年来的高考中, 对分段函数的考查形式更加丰富、更加活泼、更加新颖. 分段函数的特征决定了分类讨论思想是处理该问题的核心思想方法, 必须切实掌握, 处理好整体与局部的关系. 当然, 数形结合思想、导数思想、方程思想、一分为二的思想、转化思想也常常发挥重要作用.

责任编辑 徐国坚